Produzioni scritte degli studenti

su

argomenti di matematica (TEPs)

e

loro utilizzazione didattica

D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 144-189.

Bruno D'Amore [1]
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Italia

Hermann Maier
Dipartimento di Didattica della Matematica
Università di Regensburg
Germania

Summary. In a research, carried out in German and Italian classes of secundary level, textual eigenproduction (TEP) – a term which we have derived from Selter (1994) – as a pupils' activity in mathematics classroom and teachers interpretation of their pupils' texts have been investigated. The investigation is methodologically designed according to the rules of an interpretative research paradigm and qualitative research methods (Beck, Maier, 1993, 1994, 1996; Glaser, Strauss, 1967), and we report about it elsewhere (D'Amore, Maier, 1999, 2002). But, subsequently we can give more detailed information about our own and the teachers' interpretation of a lot of pupils' TEPs on the topic of heights in a triangle, resulting in a classification of pupils' concepts about triangle and heights.

Sunto. In una ricerca, condotta in classi tedesche e italiane di scuola secondaria, sono stati analizzati i TEPs [termine che riprendiamo da Selter (1994) e che spiegheremo in dettaglio successivamente; per ora ci limitiamo a definirli come: attività scritte degli studenti nelle ore di matematica] e le interpretazioni degli insegnanti dei testi prodotti dai propri allievi. La ricerca è stata progettata metodologicamente seguendo i principi di un paradigma di ricerca interpretativa ed i metodi di una ricerca qualitativa (Beck, Maier, 1993, 1994, 1996; Glaser, Strauss, 1967) ed è stata già oggetto di due pubblicazioni riassunte (D'Amore, Maier, 1999, 2002). In questo lavoro riprendiamo i due precedenti e li ampliamo, fornendo informazioni assai più dettagliate sia sulle nostre interpretazioni sia su quelle degli insegnanti riguardo i molti TEPs degli studenti sull'argomento "altezze di un triangolo", risultanti da una classificazione dei concetti che gli studenti hanno a proposito proprio del triangolo e delle sue altezze.

---

[1] Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di Ricerca dell'Unità di Bologna: *Ricerche sul funzionamento del sistema* allievo-insegnante-sapere*: motivazioni della mancata devoluzione*, inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: *Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*, cofinanziato con fondi MIUR.

1. I TEPs

Intendiamo con TEPs [letteralmente: produzioni testuali autonome degli allievi] (Selter, 1994) dei testi elaborati in modo autonomo dagli studenti ed aventi come soggetto questioni matematiche. Essi non devono coincidere con altre produzioni scritte in modo non autonomo (compiti in classe, appunti, descrizioni di procedimenti etc.). Le produzioni di questi ultimi esempi non sono autonome, sono sottoposte a vincoli più o meno esplicitamente stabiliti, sono di solito soggetti a valutazione dirette o indirette. Più vicina all'idea di TEP è, per esempio, la descrizione di una procedura fatta spontaneamente (per esempio in àmbito di problem solving); anzi, l'origine degli studi sui TEPs si fa di solito risalire a "protocolli commentati di problem solving" (Powell, Ramnauth, 1992). Diciamo che si considerano TEPs quelle produzioni nelle quali lo studente, messo nella condizione di *volersi* esprimere in modo comprensibile e con linguaggio personale, accetta di liberarsi da condizionamenti linguistici e fa uso di espressioni spontanee.
Esempi di TEPs sono dunque:

- protocolli commentati di problem solving (come quelli descritti sopra)
- resoconto il più possibile spontaneo di ricerche di tipo matematico (tentativi, passaggi, misurazioni, risultati,…)
- descrizioni dettagliate e spiegazioni di concetti o di algoritmi matematici
- testi introdotti da una specifica situazione che richiede di comunicare fatti e relazioni matematiche in forma scritta
- testi che definiscono concetti matematici, che formulano ipotesi, argomentazioni o prove in relazione ad un teorema matematico o comunque ad una situazione matematica
- …

Scrivere, nel senso di scrivere TEPs, può succedere ogni tanto nell'ora di matematica; può anche diventare una regolare attività degli studenti. Waywood (1992), per esempio, riporta l'esperienza della composizione di un giornale; Gallin, Ruf (1993) chiamano i testi che i loro studenti producono regolarmente "diari di viaggio"; l'attività di scrittura ha allora a che fare con il "nucleo delle idee (matematiche)" sulle quali gli allievi sono tenuti a riflettere o che sono opportunamente spinti ad inventare.
Abbiamo visto che cosa intendere per TEPs e di che tipo possano essere; ora ci chiediamo: qual è la loro possibile funzione didattica?

2. Funzione didattica dei TEPs

A nostro avviso, ci sono diverse ragioni per cui i TEPs dovrebbero essere introdotti fra le attività da svolgere durante le ore di matematica.

- La produzione di TEPs stimola lo studente ad analizzare ed a riflettere su concetti matematici, relazioni, operazioni e procedure, ricerche e processi di problem solving con cui ha a che fare. Così ciascun allievo può raggiungere una maggiore consapevolezza ed una più profonda comprensione matematica di essi.
- I TEPs possono migliorare le competenze e le prestazioni dello studente nell'uso del linguaggio specifico, poiché gli lasciano il tempo per un'attenta e riflessiva scelta dei significati linguistici, non come accade invece, a volte, durante una discussione o durante un'interrogazione, dall'evoluzione dialogica troppo rapida e caratterizzata dalla relazione troppo pre-stabilita; il TEP incoraggia ad un uso attivo dei termini tecnici e dei simboli (Maier, 1989a, 1989b, 1993; Maier, Schweiger, 1999).
- I TEPs danno allo studente l'opportunità di tenere continuamente sotto controllo la propria comprensione di questioni matematiche, grazie ad un ragionato e riflessivo riscontro con l'insegnante ed i compagni di classe.
- I TEPs consentono all'insegnante di valutare in modo effettivo la conoscenza personalmente costruita e la comprensione di idee matematiche, in maniera più dettagliata e profonda di quanto sia possibile sulla base dei comuni testi scritti, normalmente eseguiti come protocolli di attività di problem solving non commentati.

L'effetto positivo sulla valutazione nel processo di apprendimento, non è certo assicurato dal "semplice" uso dei TEPs in aula. Ci sono alcune condizioni per il successo; ci riserviamo di menzionarne in questa sede due che ci appaiono di grande importanza:

- Se si propone agli studenti di produrre testi che possano dare una visione profonda del loro modo di fare, di pensare e di comprendere la matematica, bisogna essere sicuri che essi indirizzino i loro TEPs a qualcuno che ha *bisogno* di tutte le informazioni relative alla questione di cui si scrive; questo destinatario, per quanto fittizio, non deve coincidere con il vuoto o con l'insegnante stesso. Di solito gli allievi tendono ad immaginare come unico destinatario dei loro scritti l'insegnante, il quale essi reputano conoscere già tutto quello che loro devono comunicare ed il cui unico intento è dunque semplicemente quello di esaminare la loro abilità. In questo modo non avvertono affatto il bisogno di dare una descrizione ed una spiegazione dettagliata ed esplicita. Motivazioni appropriate per cambiare l'atteggiamento di chi scrive verso un ruolo differente da quello di allievo, per esempio, potrebbero essere quelle usate con inviti del tipo: «Immagina di essere un papà / una mamma, un insegnante,…» (D'Amore, Sandri, 1996; D'Amore, Giovannoni, 1997), che si sono rivelate incredibilmente coinvolgenti, se usate in modo opportuno. Altre, potrebbero essere quella di scrivere (una lettera) ad un bambino più piccolo o ad un compagno di classe che ha perso alcune lezioni a causa di una malattia e che vorrebbe essere informato su ciò che è stato fatto in sua assenza; scrivere un diario; disegnare un poster per una mostra; comporre un articolo su di un certo tema matematico; etc. Oppure l'insegnante può organizzare una particolare situazione comunicativa nella quale, per esempio, uno studente deve descrivere un disegno geometrico in modo che il compagno di classe sia in grado di ricomporre la figura solo sulla base della sua descrizione. A volte può essere d'aiuto scostarsi dalle comuni situazioni di problem solving proponendo domande aperte o incomplete (D'Amore, Sandri, 1998).

- L'insegnante deve cercare buone idee non solo per dare stimoli significativi agli allievi, ma anche per lavorare, poi, in modo adeguato con i testi prodotti. Innanzi tutto egli deve essere in grado di interpretare ed analizzare i TEPs attentamente ed in modo esauriente. In realtà non è quasi mai una cosa semplice individuare i concetti matematici, i pensieri e le idee che sono alla base dei testi prodotti dagli allievi. C'è bisogno non solo di molta attenzione, ma anche di grande esperienza e possibilmente di un vero e proprio allenamento specifico.

L'interesse principale di ricerca del progetto, del quale forniremo in seguito organizzazione, metodologia e risultati, riguarda la seconda condizione: in che misura fanno uso dei TEPs gli insegnanti e quanta esperienza hanno nelle loro analisi e interpretazioni? Sono convinti che i TEPs possano essere un aiuto nell'insegnamento della matematica, soprattutto nella valutazione delle conoscenze e delle competenze matematiche dei singoli loro allievi?
In dettaglio, le nostre domande di ricerca sono le seguenti:
1. Quali strumenti usano quotidianamente gli insegnanti per valutare le prestazioni matematiche degli allievi? Che cosa c'è al centro della loro valutazione (conoscenze o abilità?) e in che direzione e in che modo è orientata la loro valutazione individuale o collettiva?
2. Sono disposti a conoscere ulteriori strumenti di valutazione (che non hanno mai usato prima), e qual è il loro atteggiamento verso essi? In particolare, riconoscono i TEPs come un possibile strumento di valutazione, e quale è il loro atteggiamento verso di essi?

3. Come interpretano ed analizzano un TEP? Qual è il loro punto di vista e la loro efficienza e competenza nelle interpretazioni?
4. In una prima esperienza di analisi dei TEPs, è possibile indirizzare l'atteggiamento positivo degli insegnanti verso di essi come strumento di valutazione?

Prima di passare all'azione sull'insegnante, abbiamo voluto far costruire a studenti ed analizzare noi in prima istanza dei TEPs che ci sarebbero poi serviti nel rapporto con gli insegnanti.

3. TEPs: loro classificazione ed interpretazione

Studenti italiani e tedeschi fra i 12 ed i 15 anni hanno prodotto testi scritti sulla spinta della seguente sollecitazione (anch'essa fornita per iscritto): «*Immagina di essere un papà [una mamma]…Il tuo figliolo di 7 anni ha sentito dire da qualcuno che ogni triangolo ha tre altezze e ti chiede: "Papà [mamma] che cosa vuol dire?". Non c'è niente di peggio che eludere le domande di un bambino; perciò, decidi di rispondergli*».[2]
Come detto brevemente in D'Amore, Maier (1999), abbiamo tentato di sviluppare la nostra interpretazione dei testi prodotti dagli studenti seguendo quattro criteri:

- la nostra interpretazione è il più possibile *descrittiva*, cioè è vòlta a capire ciò che realmente chi scrive pensa, quali concetti e immagini ha costruito, piuttosto che a valutare che cosa ha scritto di matematicamente corretto o adeguato;
- la nostra interpretazione tende ad essere *completa* e *dettagliata*, cioè non vuole trarre conclusioni da esempi o affermazioni, ma vuole considerare importanti tutte le parti del testo, in maniera completa, globale, piuttosto che superficiale e locale;
- la nostra interpretazione intende essere *aperta*; cioè, nonostante essa ricerchi coerenza ed evidenza, non vuole mirare a raggiungere conclusioni inequivocabili a tutti i costi, ma vuole invece ammettere la possibilità di diverse interpretazioni coesistenti all'un tempo;
- la nostra interpretazione privilegia aspetti per così dire *complementari* a quelli che emergono per iscritto, il che significa che, al contrario di quel che accade nell'interpretazione di una trascrizione di una comunicazione orale,

[2] Tale testo-sollecitazione era già stato utilizzato in (D'Amore, Sandri, 1996) per scopi di ricerca diversi. La variante al femminile che appare nel testo era assegnata alle sole allieve.

tende a considerare le omissioni nel testo come indicatori di "deficit", poiché lo studente è stato stimolato da un'istruzione considerata (dagli stessi studenti) "chiara" e "ben formulata" ed ha avuto abbastanza tempo per giungere a fornire una spiegazione completa di tutto ciò che lo studente-autore sa o che deve/vuole dire a proposito del tema matematico contenuto nella sollecitazione.

Dopo un lungo processo di intensa discussione tra noi e di interpretazione secondo questi criteri, ci è sembrato possibile in alcuni casi comprendere le immagini mentali e le idee che gli studenti hanno espresso nei loro TEPs, classificandole in un sistema di categorie. Per quanto riguarda il testo sulle altezze di un triangolo, prodotto sulla base della proposta sopra ricordata, abbiamo formato categorie "tecniche" che descrivono i concetti degli autori sul triangolo e sulle altezze, e le immagini delle relazioni tra le nozioni di lato e altezza. Inoltre abbiamo classificato i testi esaminati come descrittivi o come argomentativi, e come indirizzati davvero ad un bambino (com'era esplicitamente richiesto) o invece ad un esperto. Tutte queste categorie verranno spiegate ed esemplificate in seguito.
Nel seguito, i TEPs sono scritti in corsivo e numerati con numeri arabi. I disegni seguenti sono riprodotti a partire direttamente dai protocolli degli studenti. Naturalmente i testi dei protocolli sono qui riportati in maniera fedele nel caso di studenti italiani e tradotti nel caso di studenti tedeschi; il testo originale è a disposizione di chi volesse prenderne visione, presso entrambi gli autori. Volutamente, abbiamo evitato di sottolineare la nazionalità degli autori dei singoli TEPs.

a) Categorie "tecniche"

A. Categorie concernenti il concetto di triangolo presso gli studenti

A1: Lo studente lega alla nozione di "triangolo" l'immagine di un solido geometrico di base triangolare, per esempio una piramide triangolare o un prisma triangolare.

Esempi:

TEP (7): *Esso ha una superficie di base triangolare, ciò significa che il fondo è rappresentato da un triangolo. Le tre altezze non sono altezze, sono estremità laterali. Esse vanno dal vertice in alto giù esattamente fino alla metà della superficie di base e formano la punta.*

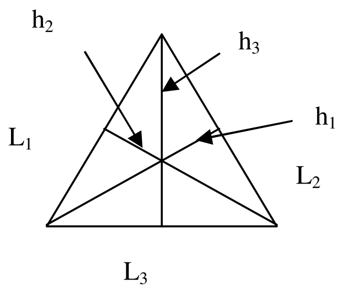
TEP (8): *Un triangolo ha tre altezze: lunghezza, larghezza, altezza; questa cosa è chiamata 3D.*

Ved. anche TEP (22) in C1.

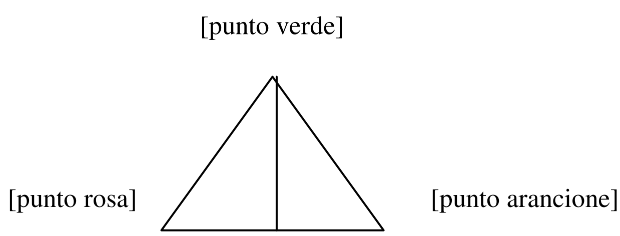
A2: Lo studente lega la nozione di “triangolo” esclusivamente all’immagine di un triangolo equilatero, che fornisce graficamente in modo esplicito.

Esempi:

TEP (9):
Direi che ogni triangolo ha tre lati uguali, ciascun lato ha la sua altezza. Tutti i bambini sono alti in un certo modo, ma nel caso di un triangolo ci sono tre bambini (lati).



TEP (3):
Qui ho disegnato un triangolo [il triangolo disegnato è indiscutibilmente equilatero] *e quando ora disegno una linea dall’angolo verde giù fino alla linea dritta questa si chiama altezza. Se disegno una linea dall’angolo arancione verso l’alto e dall’angolo verde disegno una linea verso il lato la linea in alto è anche detta altezza. Se faccio la stessa cosa dall’angolo rosa e dall’angolo verde, la linea in alto è ancora chiamata altezza.*



A3: Lo studente relaziona la nozione di "triangolo" con l'immagine di un triangolo isoscele (ma non equilatero).

Esempi:

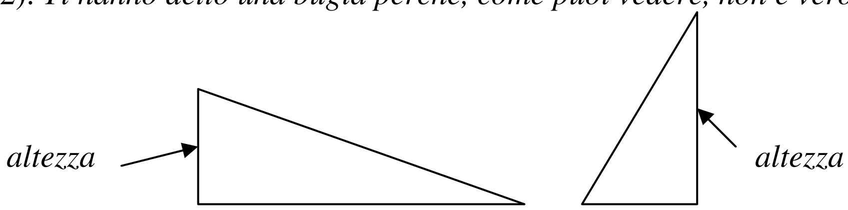
TEP (10): *Tutti i triangoli hanno un'altezza del corpo* [in seguito cancellato]. *I triangoli hanno due gambe e un'altezza del corpo, che è perpendicolare alla base. Di conseguenza:* 2× *gambe* + h_k= *3 altezze*.

TEP (11): *Il triangolo consiste di tre linee della stessa lunghezza* [cancellato]. *Un triangolo equilatero con lati di lunghezza 4 cm e di base lunga 6 cm. Una linea perpendicolare dalla punta alla base di lunghezza 3 cm la divide in due parti di 3 cm ciascuna. In un triangolo ci sono due linee più corte ma equilatere, e una linea più lunga.*

A4: Lo studente lega alla nozione di "triangolo" l'immagine di un triangolo rettangolo.

Esempio:

TEP (12): *Ti hanno detto una bugia perché, come puoi vedere, non è vero.*



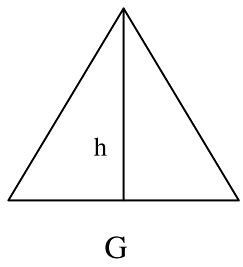
Se tu lo giri ci sono due altezze.

B. Categorie concernenti il concetto di altezza presso gli studenti

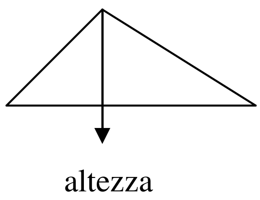
B1: Secondo lo studente il triangolo ha una sola altezza, in corrispondenza di un'unica base. La base *deve* essere orizzontale (parallela cioè ai margini alto e basso del foglio su cui è disegnata) e l'altezza *deve* essere parallela ai margini a destra e a sinistra del foglio dove è disegnata, cioè perpendicolare all'unica base.

Esempi:

TEP (13)
Un triangolo ha un'unica base e una sola altezza con le quali posso calcolare l'area e la circonferenza. Non so niente della terza altezza.



TEP (14)



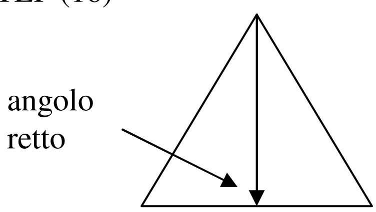
Se appendiamo un peso dal vertice, esso cade giù.
[disegno] *Guarda che cos'è un'altezza.*

TEP (15): *Tutti i triangoli hanno una sola altezza e due gambe, che sono perpendicolari alla base.*

B2: Secondo lo studente l'altezza deve essere parallela ai margini destro e sinistro del foglio su cui è disegnata, ma evidenzia che deve essere perpendicolare ad una base orizzontale (disegnata parallelamente ai margini alto e basso del foglio).

Esempio:

TEP (16)



Per disegnare l'altezza di un triangolo, devi disegnarla dritta, perpendicolare alla base

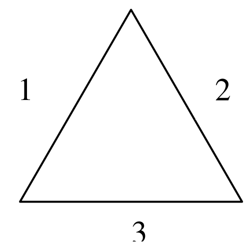
Ved. anche TEP (24) in C3.

B3: Secondo lo studente l'altezza deve essere parallela ai margini destro e sinistro del foglio su cui è disegnata. Egli sa, tuttavia, che, con una rotazione, ogni lato del triangolo può diventare la base e che, così, ogni lato può avere un'altezza (concetto sequenziale). Evidentemente la base e l'altezza perdono le loro relative proprietà nel caso in cui non si trovano più nella "giusta" posizione.

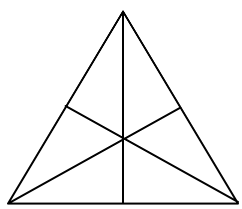
Esempi:

TEP (4): *Il triangolo è una figura piana; questo triangolo ha un'altezza, e poiché il triangolo può essere ruotato esso ha tre altezze*.

TEP (17): *Un triangolo può essere ruotato come si vuole. una volta questa è l'altezza (*lato 1*) una volta quella (*lato 2*) e una volta quella (*lato 3*) Perciò ha tre altezze*.



TEP (18): *Il triangolo ha tre altezze. Devi mettere il righello (la squadra) formando un angolo retto con la base. L'altezza è perpendicolare alla base*.



B4: Lo studente considera l'altezza una linea perpendicolare ad un lato del triangolo, che parte dal vertice opposto verso esso. Dunque, il triangolo ha tre altezze indipendenti dalla sua posizione (concetto simultaneo).

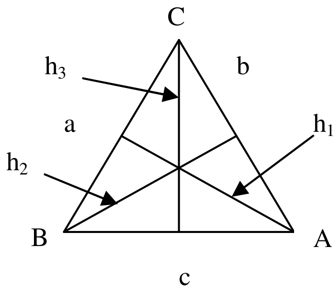
Esempi:

TEP (9): ved. categoria A2.

TEP (2): *Se fai stare delle persone in piedi con la testa nei vertici e i piedi sulla base, ciascuna di esse è un'altezza. Quella è la loro altezza (CIASCUNO HA UNA PROPRIA ALTEZZA). Così è vero, ci sono tre altezze. Se ti va, mio caro bimbo, puoi disegnare un bel triangolo e tre persone dentro: UNO, DUE e TRE. Tre altezze*.

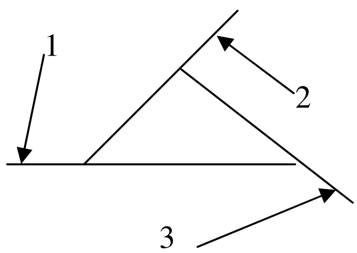
TEP (3): ved. categoria A2.

TEP (19): *Ciascun lato ha un'altezza, quando tutte le altezze sono disegnate risulta un punto di intersezione*.



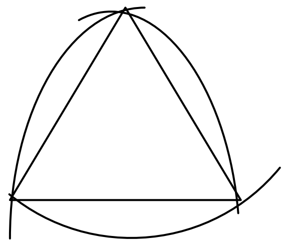
Nota: In alcuni casi è veramente difficile identificare l'idea che lo studente ha di altezza, perfino se ne mostra una. Per esempio uno studente di 12 anni dichiara laconicamente che *In un triangolo ci sono tre altezze* ed aggiunge però a questa frase il disegno qui sotto:

TEP (6):



In un triangolo ci sono tre altezze.

Un altro studente scrive: *Un triangolo ha tre* altezze ed aggiunge il seguente disegno:
TEP (20):



C. Categorie concernenti l'immagine che gli studenti hanno della relazione tra la nozione di lato e quella di altezza

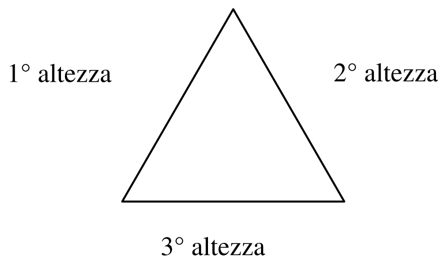
C1: Lo studente identifica altezza e lato.

Esempi:

TEP (7): ved. categoria A1.

TEP (21): *Un triangolo è chiamato triangolo, perché ha tre vertici, il che significa che, se si congiungono le tre altezze si ottiene automaticamente un triangolo*.

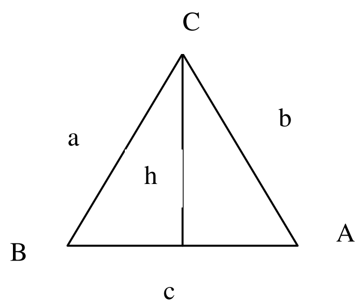
TEP (22):
Guarda, tu hai una certa statura. La statura può anche essere chiamata altezza. Così, se prendi tre volte la tua altezza, puoi disegnare un triangolo. Ora prendiamo la tua prima altezza: la disegniamo da sinistra verso destra. Disegniamo la tua seconda altezza a sinistra della prima inclinata verso sinistra. Disegniamo la terza altezza, pure inclinata, a destra della prima da destra [cancellata] *a sinistra. A questo punto abbiamo un triangolo*.



C2: Lo studente sa che l’altezza deve essere “qualcosa di perpendicolare” (a qualcosa), ma tale perpendicolarità non è necessariamente riferita ad un lato del triangolo, per lo meno non esplicitamente.

Esempi:

TEP (23):
Segmento AB lato c,
Segmento BC lato a,
Segmento AC lato b;
h = l’altezza è perpendicolare alla linea dritta (per tutte le linee dritte).



C3: Lo studente sa che l’altezza deve essere perpendicolare ad un lato del triangolo, ma non dice che deve partire dal vertice opposto.

Esempi:

TEP (16): ved. categoria B2.

TEP (24): *Il triangolo ha un’altezza, ma tre lati. I lati non sono altezze. L'altezza è sempre perpendicolare alla base.*

C4: Lo studente sa che l’altezza deve partire da un vertice del triangolo, ma non dice che deve essere perpendicolare al lato opposto.

Esempi:

TEP (25): *Se ogni triangolo ha tre altezze, allora ciascuna deve partire da un vertice così risulta un angolo retto.*

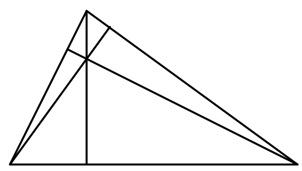
TEP (26): [senza disegno] *Il triangolo ha tre vertici; se tu lo giri puoi guardarlo da tre prospettive, se ruoti per esempio il vertice a la sua posizione è verso l'alto. Se ruoti il vertice b allora b è verso l'alto, e lo stesso vale per il vertice c.*

Ved. Anche TEP (29) in C5.

C5: Lo studente sa che l'altezza deve partire da un vertice del triangolo e deve essere perpendicolare al lato opposto.

Esempi:

TEP (27): *Le superfici del triangolo sono i segmenti che partono da…quando io realizzo un angolo di 90 gradi tra i vertici e la base, ho tre altezze.*



TEP (28): *Le altezze di un triangolo sono i segmenti che partono da un vertice e cadono perpendicolarmente sui lati opposti del triangolo.*

TEP (29): *Il triangolo ha tre lati. Ogni lato può essere chiamato base. Opposto ad ogni base c'è il punto. Se tu unisci il punto alla base. Questa è l'altezza. E questo, infatti, può essere tre volte per ogni triangolo.*

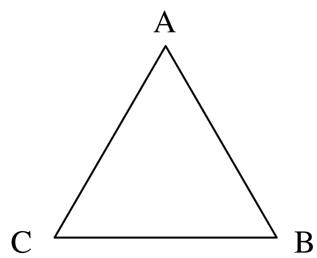
TEP (11): ved. categoria A3.

TEP (30): *Mio caro figlio, se prendi un triangolo, esso ha tre punte. Da ogni punta parte una linea che arriva al lato. Ma come? Deve formare un angolo retto, la cui misura sia di 90^0. Si tratta di una linea perpendicolare che va al lato opposto. Così, se ci pensi, in un triangolo ci sono tre punte,* *così ci sono tre linee come quella, sempre. Ognuna è un'altezza: ci sono tre altezze. Non dimenticarlo, anche quando ti sembra che ce ne sia solo una.*

b) Ulteriori categorie

Il testo che fungeva da stimolo ai TEPs sulle altezze richiedeva una risposta al quesito sul senso da attribuire al fatto che ogni triangolo ha tre altezze. Molti studenti hanno avvertito la necessità di trovare argomenti che provassero la verità di tale affermazione, altri si sono limitati solo a descrivere tale fatto. Di conseguenza noi abbiamo classificato i TEPs, nei casi in cui è stato possibile, nelle categorie *descrittiva* [ved. per esempio il TEP (11) della categoria A3] o *argomentativa* [ved. per esempio i TEPs (4) e (17) della categoria B3].
Inoltre il testo-stimolo chiedeva di spiegare l'esistenza delle tre altezze di un triangolo *ad un bambino di sette anni*. Di fatto, solo una parte (non troppo cospicua) degli studenti ha provato a farlo ed ha indirizzato davvero il proprio testo ad un bambino. Più allievi hanno invece agito quasi come fossero nella condizione di compito in classe ed hanno indirizzato i loro TEPs ad una specie di revisore (identificato con l'insegnante) il cui scopo è capire che cosa essi sanno riguardo a quell'argomento [d'altra parte, questo atteggiamento coincide con quello segnalato da Schubauer Leoni (1988, 1989) e da Schubauer Leoni, Ntamakiliro (1994)]. Questo ci ha portato a classificare ulteriormente i TEPs come *indirizzati ad un bambino* [ved. per esempio TEP (22) della categoria C1] e *indirizzati all'insegnante*, come per esempio il seguente:

TEP (5): *La prima altezza va attraverso il vertice C. Essa va giù dritta fino al segmento opposto. La seconda altezza va attraverso il vertice B. Essa arriva dritta al segmento opposto. La terza altezza va attraverso il vertice A. Essa arriva al segmento opposto.*



c) ***Rappresentazioni quantitative delle categorie dei TEPs***

Il numero di studenti coinvolti nelle prove è stato di 110 tedeschi e 148 italiani.
In D'Amore, Maier (1999) abbiamo dato alcune distribuzioni quantitative a seconda della categoria di appartenenza dei singoli TEPs; poiché però parecchi TEPs di fatto si possono ascrivere a categorie diverse, e dato che l'analisi quantitativa si è rivelata sostanzialmente insignificante ai fini della ricerca, la omettiamo, rinviando a quel lavoro preliminare il lettore che fosse ugualmente interessato a prenderne visione.

4. L'interpretazione dei TEPs da parte degli insegnanti

In questo paragrafo descriveremo il progetto della nostra ricerca prima di riportare alcuni risultati, oltre quelli già visti in precedenza. Essa è stata progettata metodologicamente seguendo i principi di un paradigma di ricerca interpretativa ed i metodi di una ricerca qualitativa (Beck, Maier, 1993, 1994, 1996; Glaser, Strauss, 1967). Il numero degli insegnanti intervistati è 16.

4.1. Impianto del progetto di ricerca

Abbiamo eseguito una sequenza di 3 interviste rigorosamente individuali con ciascuno dei 16 insegnanti di matematica, 8 in Germania ed 8 in Italia.[3]
Nella prima intervista individuale è stato chiesto agli insegnanti di riferire che cos'è al centro della loro attenzione quando valutano in classe le competenze dei loro allievi e quali sono i metodi di cui in genere fanno uso. Inoltre è stato loro chiesto di parlare delle proprie conoscenze riguardo le procedure di valutazione che in genere non applicano e di riportare le eventuali ragioni del perché non ne fanno uso. Nel caso in cui il metodo dei TEPs non fosse stato menzionato spontaneamente fino a quel momento, è stato chiesto agli insegnanti se ne erano a conoscenza, quali potessero essere le loro esperienze con esso e se avessero mai considerato di introdurlo nelle loro classi. L'intervistatore ha tentato di porre le domande in maniera aperta, per far sì che gli insegnanti potessero rispondere in modo colloquiale, aperto

[3] Gli insegnanti italiani intervistati non fanno parte di alcun NRD.

e per poter dunque porre ulteriori domande più precise in caso di risposte non chiare o insufficientemente motivate o circostanziate.

In seguito sono stati presentati a tutti gli insegnanti alcuni dei precedenti TEPs prodotti da studenti (nelle lingue originali o tradotti a seconda dei casi), in risposta all'istruzione già in precedenza ricordata: «*Immagina di essere un papà [una mamma]…Il tuo figliolo di 7 anni ha sentito dire da qualcuno che ogni triangolo ha tre altezze e ti chiede: "Papà [mamma] che cosa vuol dire?". Non c'è niente di peggio che eludere le domande di un bambino; perciò, decidi di rispondergli*».
Oltre che alcuni dei TEPs precedenti, agli insegnanti sono stati proposti testi prodotti da studenti e pubblicati in D'Amore, Sandri (1996, 1998), per esempio quello di Simona (2° anno di Scuola Media, dunque dai 12 ai 13 anni di età) che diceva: «*Figlio mio, tu ancora non conosci la geometria, ma ti spiegherò che cosa vuol dire la parola altezza. Come te, io e papà abbiamo un altezza che è misurata dalla testa ai piedi; così anche i triangoli hanno un'altezza, ma la loro altezza si misura dal vertice, che è un piccolo punto, giù fino alla base, che è come i nostri piedi. Poiché i triangoli hanno tre piccoli punti (vertici), hanno tre altezze perché hanno tre paia dei nostri piedi. E poiché noi abbiamo solo una testa e un paio di piedi, abbiamo una sola altezza*».
Dopo aver ricevuto in consegna questi TEPs, è stato chiesto agli insegnanti di leggerli ed analizzarli attentamente per conto proprio, per ricavare quanto possibile sulle conoscenze e competenze matematiche degli autori rispetto a ciascun argomento.

Nella seconda intervista individuale, alcuni giorni dopo, ciascun insegnante ha dato la propria interpretazione dei TEPs che aveva ricevuto. Si richiedeva a ciascuno di commentare in che misura gli studenti avessero compreso la richiesta e di dare un giudizio sulle loro risposte, di descrivere eventuali strategie errate o ragionamenti non corretti da parte degli studenti, e infine di dare un giudizio sulle abilità degli allievi. In seguito si è chiesto agli insegnanti di consentire lo svolgimento di una prova analoga nella loro classe, cui fossero sottoposti i propri allievi, cioè la redazione di testi sotto stimoli identici a quelli dati agli studenti italiani in precedenza.
Tutti i 16 insegnanti coinvolti nel lavoro hanno accettato.

Alcuni giorni dopo, i 16 insegnanti facevano le prove in aula e consegnavano poi i protocolli ottenuti senza assolutamente guardarli. Tali protocolli venivano esaminati dai due ricercatori con molta accuratezza.

80 TEPs, 5 per ogni classe, attentamente selezionati secondo criteri di diversità, sono stati trascritti al PC, in modo che nella successiva intervista l'insegnante non potesse riconoscerne le grafie.

Nella terza intervista individuale, si consegnavano a ciascun insegnante le trascrizioni di 5 TEPs scelti tra quelli prodotti nella sua classe; si invitava quindi l'insegnante a dare spontaneamente le proprie impressioni generali riguardo i TEPs degli allievi, prima di entrare in dettaglio nell'interpretazione di essi. Generalmente, all'inizio l'insegnante non riusciva ad essere sicuro dei rispettivi autori e così ha potuto fare un'analisi senza ricorrere a pregiudizi sulle conoscenze e le abilità dei singoli allievi. In seguito, ha analizzato i TEPs uno alla volta ed è stato invitato ad indovinare il nome di ciascun autore. Una volta dichiarato l'autore presunto, gli è stato rivelato il vero nome (quasi mai azzeccato). Conoscendo il nome, egli ha potuto fare ulteriori commenti, ed è stato soprattutto invitato a dire se avesse imparato qualcosa di nuovo sullo stato cognitivo di quello studente e che cosa.
Durante la stessa terza intervista, si è tornati ad una discussione generale sui TEPs. Se il progetto aveva rappresentato per l'insegnante la prima occasione di usarli, l'intervistatore chiedeva che cosa ne pensasse come metodo per avere informazioni sulle competenze e abilità di ciascuno studente. Nel caso in cui l'insegnante conoscesse già i TEPs (il che non è avvenuto in alcun caso in Italia e solo alcune volte in Germania), le domande sono state dirette ad una possibile modifica di atteggiamento nei confronti di essi. L'intervistatore ha poi voluto sapere se l'insegnante intendesse fare uso dei TEPs nella sua futura azione didattica in matematica.

Tutte e tre le interviste con ciascun insegnante sono state registrate e trascritte per un'analisi dettagliata. Tutte insieme formano la base per uno studio sulle risposte alle domande di ricerca poste in precedenza. La ricerca è partita con 2 casi che sono stati immediatamente analizzati per formulare, con il metodo di comparazione, ipotesi e teorie. In seguito sono stati scelti e analizzati altri 2 casi sulla base di comparazioni e sviluppi posteriori della teoria (campionamento teoretico nel senso di Glaser, Strauss, 1967). In questo modo, sono stati studiati 16 casi distribuiti nel modo seguente:

- 8 insegnanti della scuola secondaria tedesca, 2 del grado 6 (studenti di 12 anni), 1 di grado 7 (studenti di 13 anni), 2 di grado 8 (studenti di 14 anni) e 3 di grado 9 (studenti di 15 anni)
- 8 insegnanti italiani, 1 di biennio superiore (studenti dai 14 ai 16 anni), 5 di scuola media (studenti dagli 11 ai 14 anni) e 2 di scuola elementare

(studenti dai 6 agli 11 anni) (nessuno dei protocolli relativi a questi 2 ultimi appare in questo articolo).
Lo studio analitico comparativo di tali documenti è avvenuto talvolta a Bologna e talaltra a Regensburg.

4.2. Alcuni risultati

Per prima cosa riportiamo le descrizioni fatte dagli insegnanti dei criteri e degli strumenti da loro usati nel processo di valutazione nella prima intervista e le interpretazioni del TEP di Simona nella seconda intervista. Quindi riportiamo l'interpretazione che gli insegnanti hanno dato dei TEPs dei propri studenti nella terza intervista ed i loro commenti conclusivi sul TEP come strumento di valutazione nelle loro classi.

4.2.1. Criteri e metodi di valutazione

Una volta chiesto loro di riferire i propri metodi e criteri nel momento in cui valutano le competenze matematiche individuali degli studenti, molti insegnanti hanno genericamente evidenziato l'esistenza di diversi metodi, ma la maggior parte di essi, tanto italiani come tedeschi, si sono riferiti alle stesse modalità:

- ❑ domande dirette o interrogazioni orali in classe;
- ❑ brevi test scritti (riferiti a una piccola gamma di argomenti), nella maggior parte dei casi senza preavviso;
- ❑ lunghi test scritti (riferiti a un'ampia gamma di argomenti) da svolgersi almeno in un'ora, ma spesso due, con ampio preavviso agli studenti.

Affermazioni tipiche sono le seguenti (prendiamo come prototipo tre affermazioni di insegnanti italiani, ma esse non si discostano affatto da quelle dei colleghi tedeschi):

- ❑ Insegnante italiana D.: *No, non c'è un solo metodo che uso. Si può dire che spesso somministro prove orali o scritte, senza preavviso. Da queste ottengo sempre molte informazioni.*
- ❑ Insegnante italiana A.: *Io uso i metodi classici: prove orali e scritte, piccoli test. Di quando in quando propongo anche test scritti senza preavviso. Ciononostante, molte volte gli studenti lo sanno, se lo aspettano.*
- ❑ Insegnante italiana B.: *…No…Qual è il problema? Io faccio agli allievi molte domande dirette in classe. Loro lo sanno e rispondono. Mi piace parlare con loro. Questa è una confidenza: nel caso in cui non capiscono*

possono farmi loro stessi delle domande. E quindi, ogni quattro settimane somministro una prova scritta e anche un breve test.

Questi comuni metodi di valutazione, così universalmente diffusi, possono essere caratterizzati come "formali". In molti casi gli studenti devono rispondere a domande dirette o a problemi standard. Le loro risposte, i loro risultati parziali o finali possono essere giudicati corretti o meno, in base alle regole fissate dall'insegnante. Così il risultato della valutazione può essere usato per un supposto possibile ordinamento degli studenti della classe in base al livello di competenza individuale. L'ordine può essere diviso in poche categorie, rappresentate da valutazioni numeriche o aggettivi. Si tratta, in breve, di una valutazione normativa delle competenze degli studenti, il cui principale criterio sembra essere una corretta e chiara riproduzione di definizioni e algoritmi memorizzati.

Ma ci sono alcune eccezioni.
L'insegnante tedesco K. fa notare come il suo principale strumento di valutazione sia l'osservazione di ciascun allievo, cosa che lo fa sembrare capace di "*rendere velocemente evidenti i punti deboli, e di realizzare ciò in modo individuale*". Tuttavia le sue osservazioni sono ristrette a contributi verbali e a risultati individuali, a lavori fra compagni o di gruppo in ambiente aula.

L'insegnante tedesco S. volge l'attenzione anche all'osservazione in classe. Egli organizza un lavoro individuale nel quale gli allievi lavorano in modo indipendente mentre S. può *"passeggiare tra i banchi e osservare che tipo di difficoltà incontrano gli studenti, e aiutarli a superarle*". Al contrario di K., questi richiede agli allievi di lavorare anche alla lavagna e organizza periodi in cui gli studenti devono lavorare individualmente.

L'insegnante tedesco W. antepone a tutti gli altri strumenti di valutazione il brain storming all'inizio di ogni ciclo di lezioni. Durante il brain storming gli allievi dicono tutto ciò che sanno riguardo ad un dato argomento. In questo modo l'insegnante ha almeno un tipo di controllo collettivo sulle competenze. La sua intenzione è di *"ottenere un'impressione olistica sulle conoscenze degli studenti riguardo fatti e formule e sulla loro abilità ad applicarle in una situazione adeguata*".

L'insegnante tedesco K. utilizza uno strumento di valutazione veramente singolare: "*Io provoco gli studenti con problemi molto difficili o senza senso, che loro provano a risolvere in gruppo. Il gruppo deve servire a* *riuscire a trovare soluzioni sensate, cosa che è realizzata nel momento in cui tutti i membri del gruppo uno dopo l'altro, anche il ragazzo più lento fra loro, è in grado di spiegare la soluzione ad un altro compagno, che non è stato in grado di trovarla*".

La domanda nella quale si chiedeva se gli insegnanti conoscessero strumenti di valutazione che, per qualche ragione, non usano, ha portato poche risposte concrete. Alcuni insegnanti hanno semplicemente confessato di non conoscerne altri. Altri si sono limitati ad affermare che ne esistono molti, ma che "*non sono tutti applicabili*". Nessuno ha di fatto menzionato o descritto alcun altro strumento di valutazione. Tipica è l'espressione dell'insegnante italiano B.: "*Certo che ne conosco altri, ma non sono sicura, che cosa intendi?*". Solo un insegnante tedesco (S.) ha menzionato i TEPs spontaneamente. Egli chiama i TEPs una "*composizione matematica*". Ci sono alcune ragioni per cui egli non applica tale tecnica, "*principalmente a causa dei molti studenti provenienti da paesi stranieri con pesanti difficoltà di linguaggio; non posso aspettarmi da loro risultati soddisfacenti. In più questo tipo di valutazione richiede un'enorme quantità di tempo, non solo in classe, ma anche per la revisione*". Nonostante ciò, egli ne ritiene significativo l'uso *"in una classe che possieda soddisfacenti competenze di linguaggio".*

Quando gli abbiamo chiesto direttamente se conoscesse i TEPs, l'insegnante tedesco We ha affermato di avere avuto qualche esperienza con essi e di ritenere che si tratti di "*un adeguato strumento di valutazione*", ma che per quanto lo riguarda lo ritiene valido solo sull'argomento delle equazioni. In questo caso l'uso di TEPs gli sembra "*particolarmente adeguato, poiché per produrre un testo lo studente deve costruire la logica della richiesta e necessita di una profonda comprensione*". Tuttavia egli vuole distinguere fra valutare nel senso di dare un voto e valutare nel senso di riconoscere le competenze degli studenti, e non vorrebbe mai che i TEPs fossero usati per il primo scopo.

Affermazioni simili ha fatto l'insegnante tedesco Gr che lavora nella stessa scuola dell'insegnante We. Egli inoltre lascia che gli studenti scrivano TEPs sulla risoluzione di un'equazione ed ammette che, finora, "*non ha mai lasciato scrivere i suoi allievi su problemi geometrici*" e che ha "*difficoltà ad immaginare come ciò potrebbe essere*".

L'insegnante tedesco Wö afferma di conoscere i TEPs e dice di *"poter bene immaginare di usarli come strumento di valutazione* [della competenza]*".*

Ma nel caso della sua attuale classe egli ha *"poche speranze di ottenere risultati ragionevoli*".
Gli altri insegnanti, tutti gli 8 italiani e 5 tedeschi, confessano di non conoscere i TEPs, neppure dopo loro esplicita citazione da parte dei ricercatori.

4.2.2. Interpretazione degli insegnanti riguardo il testo di Simona

Da due insegnanti tedeschi abbiamo ricevuto analisi piuttosto interessanti del TEP di Simona. Perciò esse vengono riportate per esteso:

- Insegnante Gr.: *Credo che questo punto non sia male: …poiché l'altezza si misura partendo dai vertici e poiché un triangolo ha tre vertici, c'è un'altezza possibile da ogni vertice alla base, fino all'affermazione sulle tre paia di piedi. Da questo punto in poi non riesco a seguirla... Bene, avrebbe potuto dire che l'altezza è perpendicolare alla base o qualcosa del genere, ma penso che questo potrebbe essere chiarito a voce. Non pensano proprio a tutto, mentre devono formularlo. Tuttavia credo che si potrebbe affermare che abbia capito un po'… Ho anche pensato a come io avrei risposto alla domanda, ma persino io non sarei stato in grado di spiegare ad un bambino di 7 anni in modo che egli fosse in grado di capire. Certamente avrei potuto spiegarlo matematicamente ma in un altro modo probabilmente con l'aiuto di un modellino o qualcosa del genere. Si potrebbe spiegare meglio in modo manuale, altrimenti un bambino di 7 anni non capisce. Così per dire potrebbe essere presentato un triangolo reale e fatto cadere giù un peso, girare il triangolo e far cadere di nuovo il peso e continuare così… In questo modo si può vedere che cade sempre verticalmente. Ma certamente non può essere appreso con la parola "perpendicolare". Ti posso dire abbastanza seriamente che io stesso ho avuto qualche difficoltà con questo compito. Comunque credo che molti studenti ripensino a ciò che hanno imparato in classe piuttosto che chiedersi come potrebbero spiegarlo ad un bambino*.

- Insegnante S.: *Sì, devo ammetterlo, non male. Se la bambina ha veramente sette anni la risposta arriva ad un buon punto. In parte la risposta non è male; voglio solamente dire che un padre e una madre possono fornire un'immagine al bambino. E a proposito dell'altezza: è permesso dire che noi abbiamo un'altezza e il triangolo ne ha tre? Io la vedo in modo diverso. Non farei un collegamento così stretto con l'altezza di un uomo. Ok, si può dire che esiste qualche relazione, ma il collegamento tra l'altezza di una persona e le tre altezze di un triangolo non è corretto.*

Ma all'inizio, per un bambino di sette anni come spiegazione, perché no? Si potrebbe dire in più come deve essere sistemata questa altezza, che si tratta della più piccola distanza da esattamente questo punto alla linea opposta. Questo si può aggiungere.

Queste analisi, fornite proprio da due di quei tre insegnanti che avevano già avuto qualche esperienza con i TEPs, sono interessanti per almeno le due seguenti ragioni:

- entrando in dettaglio nel testo di Simona, tentano di dare una descrizione completa del concetto e delle idee riguardo all'altezza contenute nel testo, e le paragonano, come il primo testo mostra, con le loro stesse conoscenze matematiche sull'argomento;
- nel momento in cui valutano il testo, lo fanno in modo piuttosto differenziato.

È diverso nel caso delle seguenti analisi:

Insegnante italiana B.: *Oh sì, sono stupita. Questa risposta centra bene l'argomento, una risposta di alto livello, dal momento che è in grado di spiegare questa cosa ad un bambino di sette anni, questo significa che nella sua testa lei ha perfettamente capito che cosa sono le altezze di un triangolo... Bisogna anche osservare come tenti di spiegarlo meglio possibile.*

Insegnante tedesco We.: *Credo che l'allieva abbia fondamentalmente compreso la questione. La spiega in un modo visivo simpatico e in modo che chiunque senza una precedente conoscenza possa averne una buona idea. Sarei felice di questa risposta* [intende dire: Se la desse un allievo della mia classe].

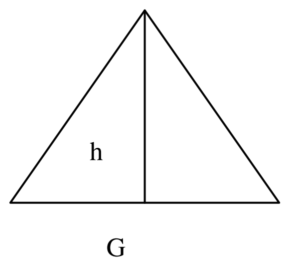
Insegnante tedesco K.: *Trovo questa Simona eccellente. La risposta deve essere letta attentamente. "Un triangolo ha tre punte". E nella mente di uno studente normalmente un triangolo è fatto così: "Un punto in alto e un piede in basso". Lei gira semplicemente intorno il triangolo. Un triangolo ha tre teste, paragonato ad un uomo. Nel caso si tratti veramente di una bambina, deve essere di grande intelligenza. Rispetto ai 7 anni di età, la risposta è completamente esauriente. Centra il punto senza chiacchiere. Molto visivo. Sono entusiasta.* [In realtà, Simona, al momento della produzione del proprio TEP aveva 12 anni; ed è invece il suo supposto interlocutore che ne ha 7].

4.2.3. Interpretazione degli insegnanti riguardo i TEPs dei propri allievi

L'interpretazione tipicamente fornita da quasi tutti gli insegnanti sul TEP di Simona e sui TEPs dei propri studenti, nel caso degli insegnanti italiani così come quelli tedeschi, si differenziano molto fra loro.

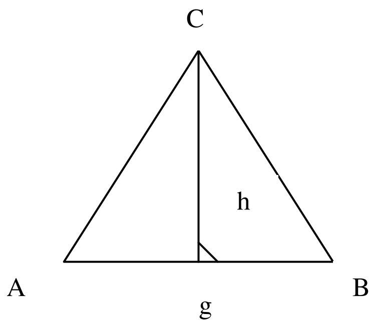
Tali TEPs, sono caratterizzabili grazie ai cinque esempi che seguono (alcuni sono già stati descritti e catalogati nella prima parte di questo articolo):

I



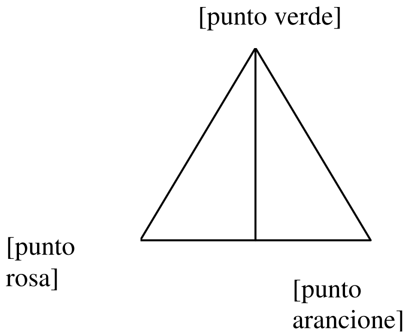
TEP (13), categoria B1
Il triangolo ha un'unica base e una sola altezza con le quali posso calcolare l'area e la circonferenza. Non so niente della terza altezza.

II



Un triangolo ha sempre un'altezza e questa va dalla base al punto C. L'altezza parte sempre perpendicolarmente dalla base al punto C.

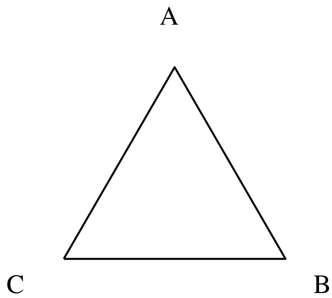
III



TEP (3) categoria A2:
Qui ho disegnato un triangolo e quando ora disegno una linea dall'angolo verde giù fino alla linea dritta questa si chiama altezza. Se disegno una linea dall'angolo arancione verso l'alto e dall'angolo verde disegno una linea verso il lato la linea in alto è anche detta altezza. Se faccio la stessa cosa dall'angolo rosa e dall'angolo verde, la linea in alto è ancora chiamata altezza.

IV TEP (4) categoria B3: *Il triangolo è una figura piana; questo triangolo ha un'altezza, e poiché il triangolo può essere ruotato esso ha tre altezze*.

V



TEP (5) Ulteriori categorie:
La prima altezza va attraverso il vertice C. Essa va giù dritta fino al segmento opposto. La seconda altezza va attraverso il vertice B. Essa arriva dritta al segmento opposto. La terza altezza va attraverso il vertice A. Essa arriva al segmento opposto.

a. Valutazione, interpretazione non descrittiva. Quasi tutte le interpretazioni degli insegnanti sono state fortemente caratterizzate da una valutazione più che da espressioni descrittive. Gli insegnanti non sono sembrati così interessati a ciò che individualmente lo studente pensa *realmente* a

proposito dell'argomento in questione, cioè dei concetti matematici e della conoscenza matematica raggiunta indicata dal testo. Hanno spesso tratto dirette conclusioni sul generale livello di competenze degli studenti. Alcuni insegnanti tedeschi (ma anche italiani) si sono persino sentiti in grado di fissare tale livello attribuendo un punteggio (un voto) agli autori del testo.
Per esempio il TEP (I) è stato commentato dall'insegnante dell'autore in questo modo: *Direi che forse si tratta di uno studente di medio livello. Quello sulla base e l'altezza per il calcolo dell'area è corretto, ma non è richiesto per la circonferenza. Qui ha confuso qualche cosa*. Dopo aver saputo il nome dell'allievo, cambia posizione: *Sì, si avvicina veramente molto ai più bravi; direi che tende al sette*.

TEP (IV) è stato molto brevemente commentato dallo stesso insegnante che ha detto: *Nel momento in cui uno è capace di ruotare un triangolo, bene, penso che, probabilmente, può comunque aver pensato la cosa giusta, poiché la rotazione sembra essere un tipo di approccio corretto*.

Ciò che l'insegnante non sembra aver compreso è che lo studente che ha redatto il TEP (I) considera le linee nel triangolo non come oggetti (geometrici) autonomi. Le parole "base" e "altezza" rappresentano nella sua mente grandezze (forse numeriche) di cui si ha bisogno per calcolare qualche cosa di relativo al triangolo (area e circonferenza). Ciò significa che le interpreta funzionalmente sotto un aspetto elaborativo. Il triangolo "ha" per così dire una base ed un'altezza proprio per quella ragione. Così, bisogna vedere base ed altezza di conseguenza, senza fare differenze fra tali due oggetti. Nel calcolo entrambe hanno la stessa funzione; non c'è bisogno di differenziazioni. Fino a questo punto lo studente evidentemente usa i nomi "base" e "altezza" quasi come sinonimi, considera la base come la seconda altezza e si riferisce alla "terza altezza" nonostante ne abbia menzionata solo una. Tutto ciò evidentemente evoca nella mente dello studente un'immaginazione algebrica piuttosto che geometrica. Persino la parola "triangolo" è da lui usata più come stimolo per la scelta di un certo procedimento algebrico che come oggetto geometrico in sé, avulso da un "uso" scolastico.

È un po' diverso espressivamente il caso del testo (IV), nell'approccio concettuale in cui l'autore chiama il triangolo una "figura piana", cioè lo inserisce concettualmente nella categoria delle figure geometriche piane (poligoni). Lo studente mostra anche un'immagine concettuale di altezza abbastanza chiara; secondo lui si tratta di una linea che esiste solo rispetto ad un lato del triangolo che è quello orizzontale, cioè parallelo ai margini alto e basso del foglio. Ciò perché l'altezza *deve* essere verticale, cioè parallela ai margini a destra e a sinistra del foglio. Contrariamente a questo ristretto concetto di altezza, l'autore del testo riesce a dare una spiegazione alle tre altezze di un triangolo. Immagina di ruotare il triangolo sul piano in modo tale che uno dopo l'altro i lati diventino orizzontali. Così ha un'altezza per ciascuno di questi lati, il che significa in totale tre altezze. (È interessante come in questo caso una linea possa perdere la sua proprietà di essere altezza quando la sua posizione cambia. D'altra parte la stessa linea recupera questa proprietà ogni volta che la particolare opportuna posizione è ripristinata). Ciò è però sufficiente, di fatto, per dimostrare l'esistenza di tre altezze.

In tutte le circostanze gli insegnanti hanno seguito la loro abitudine ad usare i testi scritti dagli allievi per accertarsi delle loro competenze matematiche in accordo con le regole interne della classe. In tal modo non hanno molto seguito quella che si dice una tendenza centrale. Piuttosto hanno cercato di valutare il testo (in realtà lo studente) in un modo fortemente dicotomico. Questi testi, come abbiamo già affermato, sono loro sembrati o totalmente buoni o assolutamente inadeguati o scorretti.

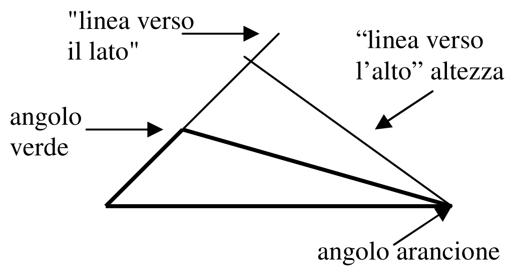
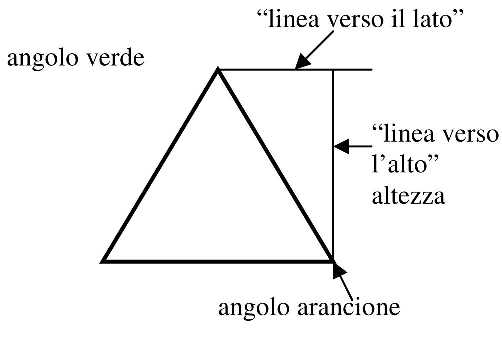
I criteri sui quali gli insegnanti hanno basato le loro valutazioni si riferiscono principalmente a:

- quanto uno studente usa regole del linguaggio matematico formale (in molti casi, affermazioni matematiche corrette date dagli allievi in un linguaggio informale non sono state accettate);
- quanto le argomentazioni degli studenti si avvicinino a quelle degli insegnanti e dunque alla presentazione fatta in classe; i TEPs (e dunque gli studenti) sono stati considerati più positivamente nel caso in cui mostravano punti simili ai contenuti presentati o con il linguaggio usato dagli insegnanti, e le idee originali da parte degli studenti sono state al più considerate "interessanti", ma non molto apprezzate.

Per quanto riguarda l'ultimo criterio menzionato, l'interpretazione del TEP (II) da parte dell'insegnante della classe dell'autore fornisce un interessante esempio: *Questa risposta in ogni caso ha già qualcosa a che fare con il teorema di Pitagora. Poiché abbiamo già cominciato a studiarlo, questo potrebbe giocare un ruolo nella risposta. Con la retta perpendicolare dove abbiamo qualche volta calcolato la base. È possibile perché abbiamo fatto partire spesso l'altezza dal punto C. Vorrei valutarlo come un buon allievo*. E, in modo confidenziale, dopo aver saputo il nome dello studente: *Sì, Stefan è sul sette*.

b. Interpretazione inequivocabile, non aperta. Con nostra sorpresa, evidentemente i testi appaiono inequivocabili alla maggior parte degli insegnanti. Essi si sono sentiti capaci, per lo più, e hanno mostrato di non avere dubbi, per lo più, nel decidere esattamente che cosa gli autori pensassero, persino quale fosse il loro particolare livello di competenza. Nessuno di loro ha fornito più di una interpretazione plausibile o possibile sui concetti e sulle idee matematiche degli studenti.

Esempio.
Nel TEP (III), l’altezza che va dal punto verde alla “linea dritta” (cioè alla base orizzontale) è abbastanza chiara da identificare. Ma come si può interpretare la seguente affermazione: *Se disegno una linea dall’angolo arancione verso l’alto e dall’angolo verde disegno una linea verso il lato la linea in alto è anche detta altezza*? Ci sono almeno due interpretazioni che hanno la stessa probabilità di essere quella che alberga nella mente dell’autore, e che possono essere chiarite dall’analisi dei seguenti disegni.

<table>
<tr><td>Lo studente immagina un’altezza fuori dal triangolo, perpendicolare al prolungamento del lato opposto.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Lo studente ha in mente l’immagine di un’altezza parallela alla larghezza del foglio e che va verso una parallela (orizzontale) alla base passante per il punto verde</td><td>
</td></tr>
</table>

L'insegnante tuttavia ha fornito un'analisi molto semplicistica (sembra più autocompiacersi delle proprie scelte didattiche) del tipo: *Dalla formulazione potrebbe essere Johann B. Sta fra il sette e l'otto, ma tende a commettere errori di disattenzione. Ha formulato il problema in modo completo, sono molto contenta per questo, perché ho lavorato molto con i gessi colorati alla lavagna.* [Risulta così spiegata l'origine della scelta cromatica per indicare i vertici effettuata da parte dell'autore del TEP 3]. *Il disegno rende più comprensibile, puoi vedere meglio le relazioni. Veramente, mi piace*.

c. Interpretazione globale, non dettagliata. Si potrebbe osservare che gli insegnanti non tendono ad analizzare il testo parola per parola, frase per frase, in modo dettagliato. Così non sono sembrati interessati né a differenziare le loro valutazioni riferendole ad un contenuto matematico, né a descrivere in dettaglio e con sufficiente esattezza i processi mentali degli studenti risultanti dai loro testi. Nella maggior parte dei casi, le analisi degli insegnanti possono essere considerate superficiali e incomplete. Il TEP (V), per esempio, è stato così interpretato: *Credo che lo studente abbia capito il problema delle altezze. Ha fissato l'altezza esattamente dal vertice C al lato opposto; le altre due allo stesso modo. Di certo non ha detto che devono essere perpendicolari alla base. Ma la risposta non è male.*
Nell'analisi di questo TEP, l'insegnante non accenna al fatto che lo studente non dice "*fino al lato opposto*" ma afferma che ogni altezza "*si allunga dritta fino al segmento opposto*". Ciò può essere considerato equivalente nel linguaggio quotidiano all'espressione matematica "*è perpendicolare al lato opposto*". Inoltre l'autore del testo parla de "*la prima*", "*la seconda*" e "*la terza altezza*". Questo è il suo modo di dimostrare indirettamente l'affermazione: *Il triangolo ha tre altezze*.

Nel TEP (I) bisognerebbe tenere in conto che il testo parla di "triangoli" e "altezze", di "basi", "aree" e "circonferenze" e menziona anche una "terza altezza", nonostante abbia parlato solo di una. Inoltre l'autore mette in evidenza di non sapere niente di questa terza altezza. Anche il TEP (III) è scritto in prima persona. Al contrario del (I), esso si lega troppo al disegno posto a fianco nel quale i vertici del triangolo sono colorati. Lo studente parla di azioni sui disegni, dove di certo le direzioni sono attribuite alle rette: "*verso il basso*", "*verso l'alto*", "*verso la linea dritta*". E formula periodi ipotetici del tipo se - allora: *Se disegno…, la linea in alto è anche detta altezza.*

4.3. Le interpretazioni degli insegnanti

Ci sembra che potrebbe essere molto importante per gli insegnanti lavorare in modo opportuno con i TEPs, il che ci spinge ad esplicitarne una possibile funzione didattica. In particolare essi potrebbero essere usati come strumento per ottenere informazioni dettagliate sulle conoscenze e sulla comprensione dei concetti matematici, dei teoremi e delle procedure costruiti dai singoli allievi. Nel nostro progetto di ricerca abbiamo cercato di capire in che misura e/o come gli insegnanti di matematica che hanno accettato di partecipare potessero far uso dei TEPs per rendersi conto del livello di conoscenza e comprensione degli studenti del proprio corso.
Ma: che tipo di esperienza hanno gli insegnanti nell'analisi di testi di questo tipo (che non siano banalmente "compiti in classe") e dunque nelle loro interpretazioni? Sono convinti che l'analisi dei TEPs potrebbe essere un aiuto nel loro insegnamento della matematica, soprattutto per valutare le conoscenze e le competenze matematiche dei singoli studenti?

Noi volevamo vedere come gli insegnanti possono realmente lavorare con i TEPs degli studenti e dunque ci sembrava opportuno e preliminare osservare come si sarebbero comportati quando noi avessimo chiesto loro di interpretarli.

a. Esempi di interpretazioni degli insegnanti dei TEPs dei propri allievi

Di seguito riportiamo alcuni esempi di come gli insegnanti hanno interpretato i TEPs dei propri studenti *prima* che venissero a conoscenza del nome dei relativi autori e come commentano la loro stessa interpretazione *dopo* essere stati informati sul nome dell'autore. (Questa informazione è indicata dal nome degli studenti tra parentesi). Su questo punto abbiamo già dato un paio di esempi in precedenza, per motivi di continuità espositiva; ora affrontiamo l'argomento con maggior rigore.
Quando l'insegnante valuta l'elaborato sottoposto a giudizio assegnando un voto, esso viene qui riportato nella categoria numerica ascendente che va da 1 a 10. (Ovviamente, noi non richiedevamo affatto questa valutazione numerica e dunque, quando essa appare, è data spontaneamente dall'insegnante).
Le dichiarazioni degli insegnanti italiani sono esattamente quelle ottenute dalle trascrizioni delle registrazioni delle interviste; quelle degli insegnanti tedeschi sono le traduzioni più fedeli possibile delle trascrizioni delle registrazioni delle interviste.

Volutamente non dichiariamo la nazionalità dei singoli insegnanti dei quali riportiamo di seguito le dichiarazioni (anche se più volte ciò appare con molta evidenza).
I testi dei TEPS via via commentati sono riportati in nota (ma senza figure) per comodità del lettore.

Insegnante K:
Sul TEP (11)[4]: *Questo è in assoluto un nonsenso, roba senza significato. Potrebbe trattarsi di Alexandra*. (Christian S). *Oh sì, Christian. Robaccia, robaccia, non sono affatto sorpresa*.
Sul TEP (22)[5]: *Devo supporre che il grado sei* [cioè uno studente di approssimativamente 11-12 anni] *non conosce il concetto di altezza in senso matematico. Non conoscono ancora l'aspetto della perpendicolarità. Si perdono sul concetto di altezza così come questo allievo. Credo che a quell'età è importante per l'allievo capire che può ruotare il triangolo, che può ruotare ogni lato, e che conosca alcune nozioni. Di fronte ad una risposta di questo tipo ho riflettuto per molto tempo.* [K. sta in silenzio per un po' di tempo, rileggendo il TEP. A questo punto sembra cambiare atteggiamento]. *Con misura intendono la misura fisica, la statura: "La misura può anche essere chiamata altezza": questa riflessione è eccellente. Poi dice: "La tua altezza tre volte"; ha visto che il triangolo si può ruotare. Ciò è più plausibile supponendo che vi sia già il concetto di triangolo, ma non le nozioni esatte. Inoltre dice: "Ora prendiamo la tua prima altezza: la disegniamo da sinistra verso destra. Disegniamo la tua seconda altezza a sinistra della prima inclinata verso sinistra. Disegniamo la terza altezza, pure inclinata, a destra della prima da destra a sinistra. A questo punto abbiamo un triangolo". Lo studente risolve tutto in modo veramente notevole. Si tratta di qualcuno in grado di parlare chiaramente.*
Sul TEP (17)[6]: *Lo studente ruota il triangolo. Sebbene non sappia tracciare l'altezza nelle diverse posizioni, per il resto va abbastanza bene. Si tratta*

---

[4] Ved. categoria A3: *Il triangolo consiste di tre linee della stessa lunghezza* [cancellato]. *Un triangolo equilatero con lati di lunghezza 4 cm e di base lunga 6 cm. Una linea perpendicolare dalla punta alla base di lunghezza 3 cm la divide in due parti di 3 cm ciascuna. In un triangolo ci sono due linee più corte ma equilatere, e una linea più lunga*.
[5] Ved. categoria C1: *Guarda, tu hai una certa statura. La statura può anche essere chiamata altezza. Così, se prendi tre volte la tua altezza, puoi disegnare un triangolo. Ora prendiamo la tua prima altezza: la disegniamo da sinistra verso destra. Disegniamo la tua seconda altezza a sinistra della prima inclinata verso sinistra. Disegniamo la terza altezza, pure inclinata, a destra della prima da destra* [cancellata] *a sinistra. A questo punto abbiamo un triangolo.*
[6] Ved. categoria B3: *Un triangolo può essere ruotato come si vuole. una volta questa è l'altezza (*lato 1*) una volta quella (*lato 2*) e una volta quella (*lato 3*) Perciò ha tre altezze*.

probabilmente di una spiegazione un po' troppo semplice, ma, nonostante questo, abbastanza logica. Possibilmente dovrebbe spiegarla alla lavagna. Ora inizio ad essere confusa. Dovrebbe trattarsi di qualcuno che ha capito. "Può essere ruotato come si vuole". Potrebbe essere Sabin o Tim. (Stephanie). *Oh, sì, sì, va bene*.

Insegnante Ga:
Sul TEP (27)[7]: *Bene, questa formulazione in sé non è corretta e non era richiesto di allegare un disegno. Ma almeno ha capito come disegnare un'altezza in un triangolo. Tuttavia non è in grado di formare una frase adeguata. Perché… infatti è sbagliato; non puoi formare un angolo retto "tra un vertice". Potrei dire di medio livello - sa come disegnare un'altezza, ma non si esprime in un linguaggio corretto.* (Frank H.) *Sì, è un buon studente. Sono anche veramente sorpresa perché è bravo anche in tedesco, ma in questa situazione non riesce ad esprimersi con il suo linguaggio*.
Sul TEP (28)[8]: *È in parte corretto. La prima frase è sbagliata. La proposizione subordinata,… in realtà lo studente non ha compreso il problema. È terribilmente difficile dire di chi si tratti, non posso far altro che tentare di indovinare… potrei dire di medio livello*. (Janine K.) *Sì, è certamente di medio livello*.
Sul Tep (25)[9]: *Secondo me questo studente ha pensato in modo corretto, ma si è espresso in modo inadeguato. Sta girando intorno alle cose. Riesce ad inserire qualche cosa di corretto nelle sue risposte, che l'altezza parte da un vertice, l'angolo retto... Ma la corretta relazione logica è persa. Sembra essere piuttosto uno studente che non ha compreso del tutto il compito, che non ce la fa. Ma non so chi in realtà potrebbe essere*. (Benjamin P.) *Questo mi sorprende. Perché non è un cattivo studente né in matematica né in tedesco. Bene, questo è il modo in cui ci si può sbagliare*.

Insegnante S:
Sul TEP (26)[10]: *È un prodotto veramente debole. Dice solo che il triangolo può essere ruotato e che può essere visto, in questo modo, da tre*

[7] Ved.categoria C5: *Le superfici del triangolo sono i segmenti che partono da… quando io realizzo un angolo di 90 gradi tra i vertici e la base, ho tre altezze*.
[8] Ved. categoria C5: *Le altezze di un triangolo sono i segmenti che partono da un vertice e cadono perpendicolarmente sui lati opposti del triangolo*.
[9] Ved. categoria C4: *Se ogni triangolo ha tre altezze, allora ciascuna deve partire da un vertice cosicché risulta un angolo retto*.
[10] Ved. categoria C4: *Il triangolo ha tre vertici; se tu lo giri puoi guardarlo da tre prospettive, se ruoti per esempio il vertice a la sua posizione è verso l'alto. Se ruoti il vertice b allora b è verso l'alto, e lo stesso vale per il vertice c*.

prospettive. Suppongo che ruoti il vertice A ma non dice niente dell'altezza del triangolo. La pone solamente sulla punta e probabilmente pensa che da una cima all'altra possa esserci forse l'altezza del triangolo. Questo è un caso di non comprensione.

Sul TEP (18)[11]: *Valuto questa risposta come buona. L'autore ha scritto: "Il triangolo ha tre altezze. Devi mettere la squadra formando un angolo retto con la base. L'altezza è perpendicolare alla base". Credo che egli sappia che l'altezza deve sempre essere perpendicolare alla base. Quello che non trovo è dove deve finire l'altezza. Non dice che va verso la punta. Ma credo che lo sappia*.

Sul TEP (24)[12]: *È corretta, ma dipende; il lato può anche essere l'altezza, che è il caso del triangolo rettangolo. "L'altezza è sempre perpendicolare alla base". Questo è quello che ha riconosciuto, ma esclude che questo possa accadere ai lati. Dovrebbe descrivere il triangolo in modo più esatto, dire a quale tipo di triangolo sta pensando. Perciò, lo valuto con un voto medio. Che l'altezza va dalla punta del triangolo non è menzionato. In più egli pensa che il triangolo abbia solo un'altezza*.

Insegnante We:

Sul TEP (7)[13]: *Non ha compreso il contenuto del compito. Al momento stiamo trattando i solidi a punta e stiamo calcolando i volumi dei solidi. Apparentemente egli ha confuso il triangolo con la piramide. Non può trattarsi di un bravo studente, qualcuno sul quattro. Alexander P.* (Stefan N.) *È veramente Stefan? Normalmente va bene, è sul sette*.

Sul TEP (23)[14]: *Essenzialmente dovrebbe aver capito, h va da C a c. Sembrerebbe piuttosto bravo e ha anche aggiunto che è lo stesso per tutte le linee dritte. In questo modo ha implicitamente dato l'informazione che ci devono essere tre altezze in un triangolo*.

Sul TEP (10)[15]: *Il calcolo è un puro non senso; ha mischiato le gambe che sarebbero i lati con le altezze. Sebbene in realtà l'altezza è corretta. Ma*

---

[11] Ved. categoria B3: *Il triangolo ha tre altezze. Devi mettere il righello (la squadra) formando un angolo retto con la base. L'altezza è perpendicolare alla base*.

[12] Ved. categoria C3: *Il triangolo ha un'altezza, ma tre lati. I lati non sono altezze. L'altezza è sempre perpendicolare alla base*.

[13] Ved. categoria A1: *Esso ha una superficie di base triangolare, ciò significa che il fondo è rappresentato da un triangolo. Le tre altezze non sono altezze, sono estremità laterali. Esse vanno dal vertice in alto giù esattamente fino alla metà della superficie di base e formano la punta*.

[14] Ved. categoria C2: *Segmento AB lato c, segmento BC lato a, segmento AC lato b; h = l'altezza è perpendicolare alla linea dritta (per tutte le linee dritte).*

[15] Ved. categoria A3: *Tutti i triangoli hanno un'altezza del corpo* [in seguito cancellato]. *I triangoli hanno due gambe e un'altezza del corpo, che è perpendicolare alla base. Di conseguenza:* $2 \times gambe + h_k = 3$ *altezze*.

sembra non aver mai sentito niente a proposito delle altre due. Deve essere uno studente che va male. Credo sia Tobia G. È sul quattro. (Nadine D.) *Veramente, è veramente fuori di testa in questo caso. È vero? È una degli studenti bravi. Pazza! "Un triangolo ha una statura e due gambe". Dovrò fare più spesso qualcosa del genere per controllare cosa pensano. Be' questa volta sono veramente sconvolta*.
Sul TEP (4)[16]: "*Poiché il triangolo può essere ruotato"... Penso che probabilmente abbia compreso, perché ciò che scrive a proposito della rotazione è in realtà già un approccio*.

Insegnante Gr:
Sul TEP (9)[17]: *Non ho idea del numero 5* [cioè a quale allievo attribuire il TEP (9) che era il quinto fornito all'insegnante G in quella seduta], *questa risposta non è matematica. Ha difficoltà a connettere le cose. Non vedo alcuna coerenza in questa risposta. Se ci dovesse essere qualche connessione sarebbe accettata, ma non ne vedo alcuna fra i lati e i bambini. È totalmente illogica*. (Katharina D.) *Veramente? È la mia studentessa più brava in matematica. Ma potrebbe essere perché si parla ad un bambino di sette anni nel testo. Perché, non posso immaginare che non abbia capito perché è veramente di gran lunga la più brava nella mia classe*.
Sul TEP (13)[18]: *Credo che non potesse completamente far uso del disegno del triangolo che abbiamo fatto alla lavagna* [in realtà, era stato chiesto agli insegnanti di non intervenire in alcun modo durante la redazione dei TEPs; ora si rivela che almeno questo insegnante non ha rispettato la richiesta, dato che ha disegnato un triangolo alla lavagna]. *Normalmente abbiamo lavorato* [intende dire: a lezione] *con un'altezza il che ha spinto a disegnare una sola altezza, ed è estremamente raro che tutte le tre altezze siano tracciate, e per questo forse ha anche detto di non sapere niente della terza altezza. Potrei pensare ad uno studente di medio livello, probabilmente Johannes W. oppure Patrizia J.* (Markus) *Sì, anche lui è sul sei*.
Sul TEP (3)[19]: *Ha davvero scritto così, non ci sono cambiamenti da fare? Dalla formulazione potrebbe essere Johann B. Sta fra il sei e il sette ma*

[16] Ved. categoria B3: *Il triangolo è una figura piana; questo triangolo ha un'altezza, e poiché il triangolo può essere ruotato esso ha tre altezze*.
[17] Ved. categoria A2: *Direi che ogni triangolo ha tre lati uguali, ciascun lato ha la sua altezza. Tutti i bambini sono alti in un certo modo, ma nel caso di un triangolo ci sono tre bambini (lati).*
[18] Ved. categoria B1: *Un triangolo ha un'unica base e una sola altezza con le quali posso calcolare l'area e la circonferenza. Non so niente della terza altezza*.
[19] Ved. categoria A2: *Qui ho disegnato un triangolo e quando ora disegno una linea dall'angolo verde giù fino alla linea dritta questa si chiama altezza. Se disegno una linea dall'angolo arancione verso l'alto e dall'angolo verde disegno una linea verso il lato la*

tende a commettere errori di disattenzione. Ha formulato il problema in modo completo, sono molto contenta per questo, perché ho lavorato molto con i gessi colorati alla lavagna. Il disegno rende più comprensibile, puoi vedere meglio le relazioni. Veramente, mi piace. (Cornelia D.) *È mia studentessa da poco. È arrivata in classe da poco. Sì, in questo modo ho direttamente delle informazioni su di lei*.
Sul TEP (19)[20]: *Si tratta certamente di un bravo studente. Probabilmente Markus F. o Alois H., sono entrambi bravi*. (Maria H.) *Sì, anche lei è sul sette*.

Insegnante Wö:
Sul TEP (29)[21]: *Il problema* [intende dire: il TEP], *secondo me, è esposto in modo indiscutibile. Deve trattarsi di uno dei migliori. Sì, le difficoltà in questo caso ci sono sempre, anche perché tra le altre cose la competenza di linguaggio gioca il suo ruolo. Alcune persone sono in grado di esprimersi meglio, altre peggio. Ed è per questo che non si può sempre dire se dipende da abilità matematiche o linguistiche. Bisogna saper separare le due cose. Ma la spiegazione è corretta e relativamente semplice e anche formulata visivamente*. (Gaby L.) *È emigrata dalla Russia e questo popolo usa guardare attraverso le cose.*
Sul TEP (21)[22]: *Non ha idea di che cosa sia un'altezza. Che un triangolo si chiami triangolo, bene… Quello che pensa delle altezze rimane secondo me molto incerto. Deve trattarsi di un allievo debole*. (Benjamin A.) *Sì, questa è una prova. È spesso uno degli ultimi.*
Sul TEP (8)[23]: *Sì, ha qualche piccola idea. Probabilmente ci ha messo qualcosa copiando, ha in qualche modo confuso le altezze e la presentazione del 3-D poiché in seguito è legato ai solidi che puoi disegnare. E da questo prende spunto. Piuttosto debole*. (Sebastian K.) *Eh sì, Sebastian, sì va spesso male*.

---

linea in alto è anche detta altezza. Se faccio la stessa cosa dall'angolo rosa e dall'angolo verde, la linea in alto è ancora chiamata altezza.

[20] Ved. categoria B4: *Ciascun lato ha un'altezza, quando tutte le altezze sono disegnate risulta un punto di intersezione*.

[21] Ved. categoria C5: *Il triangolo ha tre lati. Ogni lato può essere chiamato base. Opposto ad ogni base c'è il punto. Se tu unisci il punto alla base. Questa è l'altezza. E questo, infatti, può essere tre volte per ogni triangolo*.

[22] Ved. categoria C1: *Un triangolo è chiamato triangolo, perché ha tre vertici, il che significa che, se si congiungono le tre altezze si ottiene automaticamente un triangolo*.

[23] Ved. categoria A1: *Un triangolo ha tre altezze: lunghezza, larghezza, altezza; questa cosa è chiamata 3D*.

Insegnante D:
Sul TEP (31)[24]: *Guarda, sono indeciso, confuso. È una cosa senza logica. Quando ho spiegato le proporzioni ho capito che erano cambiati e che non erano più in grado di riflettere. È difficile per me farli riflettere. Ma non pensavo che la situazione fosse questa.*
Sul TEP (16)[25]: *Non è attenta* [non si sa in base a che cosa decida il genere dell'autore del TEP (16); in effetti, però, è vero che l'autore sia di sesso femminile] *a quello che scrive. Invece di dimostrare che ci sono tre altezze, sembra dire che ce n'è una sola. Ti avevo detto che non pensavo ci fosse una situazione come questa.*
Sul TEP (2)[26]: *Oh, questo è carino. Sembra esattamente quello che ci avete dato*. [Sta citando il fatto che avevamo discusso in via preliminare altri TEPs non realizzati nella sua classe; ed uno di questi aveva come autrice la studentessa di nome Simona]. *Molto simile. È un peccato che non disegni una figura*. [Gli viene chiesto chi potrebbe essere l'autore del testo]. *No, non lo so, ma sì, forse sì. Forse si tratta di… ma non lo so, no, penso di non essere in grado*. [Gli viene chiesto se vuole sapere il nome dello studente; risponde di sì. Gli viene detto il nome dello studente]. *No, veramente no. Ma come? Ma questo studente è sempre mentalmente assente, sempre fuori, sembra sempre fuori. No, guarda, non me lo sarei mai aspettato. Vedi? È veramente utile*. [Fa riferimento evidentemente alla funzione dei TEPs]. *È veramente una cosa molto utile. Tutto questo potrebbe essere inserito nei libri di testo; sì, hai presente?*

b. Classificazione delle interpretazioni degli insegnanti

Ricordiamo che abbiamo intervistato 16 insegnanti, 8 italiani ed 8 tedeschi; a ciascuno sono stati proposti 5 TEPs tra quelli realizzati dagli allievi della propria classe; disponiamo quindi delle interpretazioni di 80 TEPs.
Che cosa si può dire a proposito delle interpretazioni degli insegnanti (delle quali, quelle precedentemente riportate sono solo una parte)? Come possono essere classificate?

---

[24] Testo del TEP (31): *Le altezze si incontrano sempre nello stesso punto. Questo te lo devi ricordare*.
[25] Ved. categoria B2: *Per disegnare l'altezza di un triangolo, devi disegnarla dritta, perpendicolare alla base.*
[26] Ved. categoria B4: *Se fai stare delle persone in piedi con la testa nei vertici e i piedi sulla base, ciascuna di esse è un'altezza. Quella è la loro altezza (CIASCUNO HA UNA PROPRIA ALTEZZA). Così è vero, ci sono tre altezze. Se ti va, mio caro bimbo, puoi disegnare un bel triangolo e tre persone dentro: UNO, DUE e TRE. Tre altezze*.

In generale, gli insegnanti non sembrano molto interessati a quello che realmente gli studenti pensano dell'argomento in questione, dei concetti e delle conoscenze matematiche acquisite, almeno per come risultano indicate dai TEPs. Piuttosto traggono direttamente delle conclusioni sul generale livello di competenze degli allievi. Alcuni insegnanti (non pochi) si sentono persino in grado di fissare questo livello attribuendo un voto all'autore (sconosciuto) del testo.

Come abbiamo già detto sopra, in genere, diversi insegnanti hanno seguito l'abitudine di usare i testi scritti dagli studenti per accertare le loro competenze matematiche secondo criteri stabiliti all'interno della usuale vita di classe. In tal modo non sembrano seguire quella che si dice una tendenza generalizzatrice. Piuttosto hanno cercato di valutare il testo (in realtà lo studente) in un modo fortemente dicotomico: questi testi, insomma, solo loro sembrati o totalmente buoni o assolutamente inadeguati o scorretti.

Ricordiamo ancora che i criteri sui quali gli insegnanti hanno basato le loro valutazioni si riferiscono principalmente a:

- quanto uno studente sia in grado di far uso di un linguaggio matematico abbastanza formale (per lo più, affermazioni matematiche corrette ma date dagli allievi in un linguaggio colloquiale non sono state accettate)
- quanto le espressioni degli studenti si avvicinano alle modalità argomentative proposte dagli insegnanti in aula; sono stati considerati più positivamente nel caso in cui mostravano punti simili ai contenuti presentati nel linguaggio usato dagli insegnanti; le idee originali espresse in alcuni TEPs dagli studenti sono state al più considerate "interessanti", ma non molto apprezzate.

Altri commenti sulla valutazione data dagli insegnanti ai TEPs dei propri allievi sono già stati fatti in precedenza.

5. Risposte alle domande di ricerca e conclusioni

Se la funzione didattica dei TEPs, descritta anche nei nostri precedenti lavori (D'Amore, Maier, 1999, 2002) in modo rapido, dovesse rivelarsi convincente, sembra assolutamente necessario che l'insegnante ne faccia uso in modo adeguato. Ciò significa che egli dovrebbe provvedere ad un regolare allenamento degli studenti nello scrivere testi che deve essere poi preparato e capace di interpretare ed analizzare in modo descrittivo piuttosto

che valutativo, in maniera dettagliata e completa e non generale e selettiva, consapevole del fatto che ogni testo è aperto a diverse interpretazioni. Evidentemente possedere questa abilità non è un problema di per sé; deve essere però appresa ed oggetto di allenamento, in entrambi i versanti, produzione (da parte degli studenti) ed analisi (da parte degli insegnanti).
Inoltre l'insegnante deve essere convinto che la sua azione di insegnamento e di organizzazione del processo di apprendimento può avere e, normalmente ha, diversi effetti su ciascun singolo studente. Queste differenze non sono solo quantitative, cioè relative al fatto che allievi diversi ricavano di più o di meno dall'offerta dell'insegnante, ma anche, nello stesso tempo, di tipo profondamente qualitativo. Ciò significa che gli studenti costruiscono qualitativamente concetti, conoscenze e ragionamenti matematici *diversi* l'uno dall'altro.
L'insegnante, una volta conosciuta l'esistenza dei TEPs ed una volta appreso a farne un uso valutativo sulla situazione cognitiva reale raggiunta da ciascuno studente, dovrebbe essere impaziente di conoscere queste differenze individuali, per poter progettare di conseguenza il programma per la sua classe.
Far scrivere agli allievi TEPs e far loro apprezzare questa attività come uno stimolo all'apprendimento e come strumento di valutazione (sia sull'efficacia della propria attività in aula, sia sul funzionamento cognitivo di ogni studente) richiede però una particolare visione di che cos'è la matematica e che cos'è l'apprendimento della matematica. Tale visione, fortemente antropologica, deve accettare di prendere in seria considerazione che cosa significa, per ciascuno studente, costruirsi concetti matematici *privati*, ammetterli e farne poi un uso didattico, anziché, semplicemente, giudicarli.
Molti insegnanti sono rimasti sorpresi nel momento in cui hanno confrontato le loro valutazioni dei TEPs con le loro precedenti convinzioni sugli autori. Molti hanno trovato degli alibi per i "bravi studenti" che hanno scritto testi "non buoni" e per gli "studenti meno bravi" che hanno scritto "buoni" test; ma molti non si sono resi conto che il sistema dei TEPs può aiutarli a imparare molto sulle competenze ed i ragionamenti dei loro singoli allievi. Pochi, infatti, hanno concluso con questa convinzione, anche se qualcuno ha fatto cenno alla possibilità di usare questo strumento regolarmente in futuro.

Bibliografia

Beck C., Maier H. (1993). Das interview in der mathematikdidaktischen forschung. *Journal für mathematikdidaktik*. 13, 2, 147–179.

Beck C., Maier H. (1994). Zu methoden der textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen forschung. Maier H., Voigt J. (eds.) (1994). *Verstehen und verständigung im mathematikunterricht − arbeiten zur interpretativen unterrichtsforschung*. Köln: Aulis. 43–76.

Beck C., Maier H. (1996). Interpretation of text as a methodological paradigm for empirical research in mathematics education. Gagatsis A., Rogers L. (eds.) (1996). *Didactics and history of mathematics*. Thessaloniki: Erasmus Project. 3–34.

D'Amore B., Giovannoni L. (1997). Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. un'esperienza didattica nella scuola media. *La matematica e la sua didattica*. 4, 360–399.

D'Amore B., Maier H. (1999). Investigating teachers' work with pupil' textual eingenproductions. Schwank I. (ed) (1999). *European research in mathematics education*. I, II, Osnabrück. 261-278.

D'Amore B., Sandri P. (1996). "Fa' finta di essere...". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19A, 3, 223–246.

D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4–18.

Davidson D. M., Pearce D. L. (1983). Using writing activities to reinforce mathematics instruction. *Arithmetic teacher*. 35, 8, 42–45.

Gallin P., Ruf U. (1993). Sprache und mathematik in der schüle. Ein bericht aus der praxis. *Journal für didaktik der mathematik*. 14, 1, 3–33.

Glaser B.G., Strauss A.L. (1967). *The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research*. New York: Aldine.

Kasper H., Lipowsky F. (1997). Das lerntagebuch als schülerbezogene evaluationsform in einem aktiv-entdeckenden grundschulunterricht − beispiel aus einem geometrie-projekt. Schönbeck J. (ed.) (1997). *Facetten der mathematikdidaktik*. Weinheim: Dt. Studienverlag. 83–103.

Maier H. (1989a). Problems of language and communication. Pehkonen E. (ed.) (1989). *Geometry − geometrieunterricht*. Helsinki: University. 23–36.

Maier H. (1989b). Conflit entre langage mathématique et langue quotidienne pour les elèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*. 3, 86–118.

Maier H. (1993). Domande che si evolvono durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 175–191.

Maier H., Schweiger F. (1999). *Mathematik und sprache. Zum verstehen und verwenden von fachsprache im mathematikunterricht*. Wien: Hölder-Piechler-Tempsky.

Miller L.D. (1992). Teacher benefits from using impromptu writing prompts in algebra classes. *Journal for research in mathematics education*. 23, 4, 329–340.

Phillips E., Crespo S. (1996). Developing written communication in mathematics through math penpal letters. *For the learning of mathematics*. 16, 1, 15–22.

Powell A. B., Ramnauth M. (1992). Beyond questions and answers: prompting reflections and deepening understandings of mathematics using multiple-entry logs. *For the learning of mathematics*. 12, 2, 12–18.

Schubauer Leoni M. L. (1988). L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: la situation de test revisitée. Perret-Clermont A. N., Nicolet M. (eds.) (1988). *Interagir et connaître*. Cousset: Delval. 251-264.

Schubauer Leoni M. L. (1989). Problématisation des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Ottawa: Agence d'Arc. 350-363.

Schubauer Leoni M. L., Ntamakiliro L. (1994). La construction de réponses à des problèmes impossibles. *Revue des sciences de d'éducation*. XX, 1, 87-113.

Selter Ch. (1994). *Eigenproduktionen im arithmetikunterricht der primarstufe*. Wiesbaden: Dt. Universitätsverlag.

Waywood A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the learning of mathematics*. 12, 2, 34-43

Gli autori ringraziano la dott.ssa spec. Cristiana Lanciotti per l'aiuto dato nella traduzione e la dott.ssa spec. Silvia Sbaragli per la segnalazione di alcune sviste in una precedente stesura dell'articolo. Ringraziano inoltre i referee per l'accurato lavoro di rilettura critica che li ha portati in alcuni punti ad una revisione critica dell'intero lavoro.